

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2023/24

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że liczby naturalne p , $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ są trzema liczbami pierwszymi wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 5$.
2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) , gdzie

$$a_n = 2 \log_{0,1} |1 - 2n| + \log_{0,1}(1 + 3n), \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

3. W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 4$, $|BC| = 2$ oraz miara 30° kąta wewnętrznego przy wierzchołku B . Oblicz stosunek długości promienia opisanego na trójkącie ABC do długości promienia wpisanego w ten trójkąt.
4. Dla jakich liczb m

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{3+n} + 2^{3+2n}}{3^n + 2^{m^2+2n}} = 3 ?$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Jaką najmniejszą objętość może mieć ostrosłup prawidłowy trójkątny opisany na kuli o promieniu R ?
6. Zbiór S zawiera n różnych elementów, gdzie $n \geq 3$. Losowo dzielimy zbiór S na trzy parami rozłączne podzbiory S_1, S_2, S_3 w ten sposób, że dla każdego $s \in S$ prawdopodobieństwo wylosowania s do każdego z podzbiorów S_i jest jednakowe. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
 A : dokładnie jeden ze zbiorów S_i jest pusty;
 B : zbiory S_1, S_2, S_3 są równoliczne;
 C : dwa ustalone elementy zbioru S należą do różnych zbiorów S_i .
7. Dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 150^\circ)$ spełniona jest równość

$$3 \operatorname{tg}^4 \alpha - 13 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4 = 0.$$

Oblicz $\cos 4\alpha$.