

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2023/24

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Na ile sposobów można z talii 52 kart wybrać 6 kart, wśród których będą dokładnie dwa asy lub co najmniej trzy piki?
2. Wyznacz zbiór
$$A = \{x : x \in (0; +\infty), x^{\sin 2x+1} \leq 1\}.$$
3. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu $1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, \dots$
4. Na trasie o długości 240 km średnia prędkość pociągu pospiesznego jest o 45 km/godz. większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę w czasie o godzinę i 12 minut krótszym niż pociąg osobowy. Oblicz czas, w jakim pociąg pospieszny pokonuje tę trasę.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Na okręgu O leżą punkty $A = (-1, -6), B = (6, 1), C = (2, 3)$. Okrąg O' jest obrazem okręgu O przez symetrię względem prostej AB . Oblicz pole najmniejszego zbioru wypukłego zawierającego oba okręgi O i O' .
6. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{x + p + 1}{x^2 - 4}.$$

Wyznacz liczbę punktów, w których funkcja f ma ekstremum lokalne, w zależności od parametru p .

7. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót trójkąta prostokątnego wokół jego przeciwprostokątnej, wiedząc, że długości boków tego trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4.